قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الرابع عشر

4 صفحات

الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 30/10/2014

السرعة، الدقّة والتميُّز

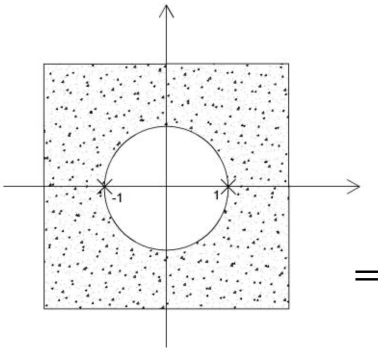
لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

/RedBuildingTeam

مثال: أحسب $I=\oint_L \frac{dz}{z^2-1}$ حيث L مربع رؤوسه النقاط $\{\pm 2,\pm i\}$

$\frac{1}{z^2-1}$ تحليلي في $\mathbb{C}\setminus\{\pm 1\}$ نعزل النقطتين باستخدام الدائرة $L_1 : \|z\|=1$

$$I=\oint_L \frac{dz}{z^2-1}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{2it}-1}\,dt$$



$$=i\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}}{e^{i2t}-1}dt$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-e^{-it}}dt\ =i\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2i\sin t}$$

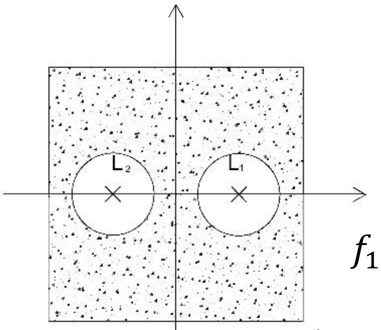
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{sint}=\frac{1}{2}[\ln(\sec t+\tan t)]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[ln\left|\frac{1}{cos2\pi}-0\right|-\ln(1-0)\right]=0$$

حل بطريقة ثانية:

$$\int_L gdz=\int_{L1} gdz\ +\int_{L2} gdz$$

$$\Rightarrow I_1\int_{L1}\frac{1}{(z+1)(z-1)}dz\ ,\quad I_2=\int_{L2}\frac{1}{(z+1)(z-1)}dz$$



$$f_1=\frac{1}{z+1}\quad ,\quad f_2=\frac{1}{z-1}$$

باستخدام نظرية صيغ كوشي التكاملية

$$f_1(1)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f_1}{z-1}dz\ \Rightarrow I_1=\pi i$$

$$f_2(-1)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f_2}{z+1}dz\Rightarrow-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f_2}{z+1}dz\Rightarrow I_2=-\pi i$$

$$\Rightarrow I=I_1+I_2=0$$

مثال: أوجد التابع التحليلي $f(z)$ المحقق للشرطين :

$$Re\big(f'(z)\big) = 3x^2 - 4y - 3y^2$$

$$f(1+i) = 0$$

الحل: بما أن f تحليلي فأن f' أيضاً تحليلي

$$u'_x = 6x = v'_y$$

$$\Rightarrow v(x,y) = 6xy + h(x)$$

$$u'_y = -v'_x$$

$$(-6y - 4) = -(6xy + h(x))'_x$$

$$6y + 4 = 6y + h'(x)$$

$$h'(x) = 4 \Rightarrow h(x) = 4x + c_1$$

$$v(x,y) = 6xy + 4x + c_1$$

$$\Rightarrow f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2 + i(6xy + 4x + c_1)$$

$$f'(z) = 3z^2 + 4iz + ic_1$$

التابع تحليلي في $\mathbb{C}$

$$f(z) = \int f'(z)\,dz = z^3 + 2iz^2 + ic_1 z + c_2$$

لإيجاد c_1, c_2 نعوض $f(1+i) = 0$

$$(1+i)^3 + 2i(1+i)^2 + ic_1(1+i) + c_2 = 0$$

$$2i - 2 - 4 + ic_1 - c_1 + c_2 = 0$$

$$-6 - c_1 + c_2 + i(c_1 + 2) = 0$$

عدد عقدي يساوي الصفر $\Leftarrow$ $\mathrm{Re}(z) = 0$ $\quad Im(z) = 0$

$$c_1 + 2 = 0 \Rightarrow c_1 = -2$$

$$-6 + 2 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 4$$

$$\Rightarrow f(z) = z^3 + 2iz^2 - 2iz + 4$$

المتسلسلات العقدية :

مبرهنة : الشرط الازم و الكافي لتقارب المتسلسلة العقدية :

$$\boxed{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

هو تقارب المتسلسلتين و تقارب $\boxed{2}$ .... $\sum a_n ، \sum b_n$ معاً و إذا كان: $a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \quad b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

فإن $\quad A_n = \sum a + ib \;\; \ldots$

إن $\boxed{1}$ متقاربة بالإطلاق إذا تقاربت المتسلسلة الحقيقية "ذات الحدود الموجبة" $\sum \|A_n\|$

أما إذا كان $\sum \|A_n\|$ متباعدة بينما $\boxed{1}$ متقاربه نسمي التقارب تقارب شرطي

مبرهنة : الشرط الازم و الكافي لتقارب $\boxed{1}$ بالإطلاق هو تقارب $\boxed{2}$ معاً بالإطلاق

خواص المتسلسلات المتقاربة بالإطلاق :

١) يمكن تغير ترتيب حدودها كيفما نشاء
٢) مجوع أو طرح أو جداء متسلسلتين متقاربتين بالإطلاق يعطي متقاربه بالإطلاق

مثال : بين طبيعة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i + \frac{-1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right) + i\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

المتسلسلتان توافقيتان متناوبتان فهما متقاربتين شرطياً

$$\sum \left\|\frac{i^n}{n}\right\| = \sum \frac{1}{n} \Rightarrow \text{التوافقية (متباعدة)}$$

فالمتسلسلة المعطاة متقاربة شرطياً.

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

مثال (٢):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathbf{1+i+in}}{\mathbf{n(n+1)}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ سلسلة ريمان المتناوبة متقاربه بالإطلاق

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ (توافقية متناوبة متقاربة شرطيا)

$\Rightarrow\sum(-1)^n\frac{1+i+in}{n(n+1)}$ (متقاربة شرطيا)

"من يأخذون دائما يخسرون ومن يعطون دائما

هم الفائزون"